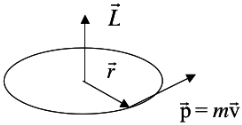
Momento angular

El momento angular en mecánica clásica, operadores

Consideremos una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$ y cuya posición respecto al origen de coordenadas viene definida por $\vec{r}$ (figura), el momento angular viene definido por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



En coordenadas cartesianas:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

La derivada es igual al momento de la fuerza que actúa sobre la partícula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si la fuerza tiene la misma dirección que $\vec{r}$, entonces el momento de la fuerza es cero y el momento angular es constante (problemas de campo central, como el movimiento de un planeta alrededor del Sol o el de un electrón alrededor del núcleo, donde el momento angular es una constante del movimiento).
Usando la regla de construcción de operadores (postulado VI), los operadores de momento angular son:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \widehat{L}_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \widehat{L}_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2$$

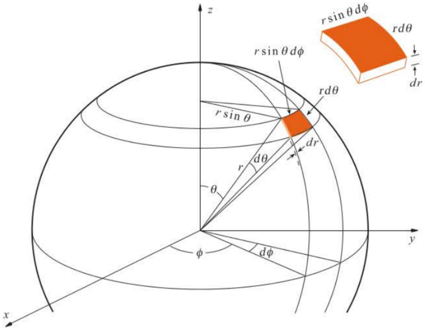
Sus relaciones de conmutación son:

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] &= i\hbar\widehat{L}_z \\ [\widehat{L}_y, \widehat{L}_z] &= i\hbar\widehat{L}_x \\ [\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] &= i\hbar\widehat{L}_y \end{aligned}$$

Momento angular

Coordenadas esféricas

Sin embargo, puede verse que el operador $\widehat{L}^2$ conmuta con cada uno de los operadores asociados a cada componente del momento angular. Por tanto, es posible asignar simultáneamente funciones propias al cuadrado del momento angular y a una de sus componentes (generalmente elegimos $\widehat{L}_z$, las otras dos componentes quedan indeterminadas). En los problemas de campo central es preferible utilizar coordenadas esféricas.



$$
\begin{aligned}
x &= r\text{sen}\theta\cos\phi & \quad 0 \le r \le \infty \\
y &= r\text{sen}\theta\text{sen}\phi & \quad 0 \le \theta \le \pi \\
z &= r\cos\theta & \quad 0 \le \phi \le 2\pi
\end{aligned}
$$

El elemento de volumen es:

$$\boxed{d\tau = dx\, dy\, dz = r^2\text{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}$$

Los operadores de momento angular en coordenadas esféricas son:

$$
\begin{aligned}
\widehat{L}_x &= i\hbar\left(\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
\widehat{L}_y &= -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\,\text{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
\widehat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

Y el operador $\widehat{L}^2$ es:

$$\widehat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

Autofunciones y autovalores

Sólo es posible conocer con precisión de manera simultánea el cuadrado del momento angular y una de sus componentes ($\widehat{L}_z$). Las funciones propias, $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, reciben el nombre de **armónicos esféricos** y serán comunes a ambos operadores

$$\widehat{L}_z \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi) = m\hbar \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi)$$
$$\widehat{L}^2 \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

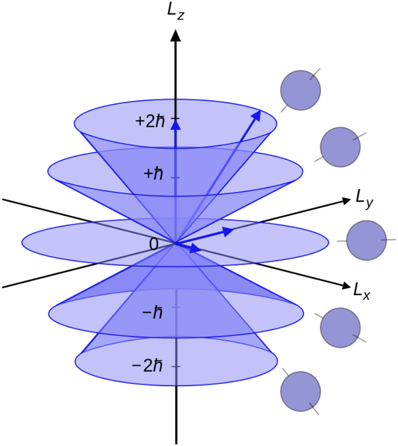
con los números cuánticos m y ℓ que cumplen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \ell; & \ell \geq |m| \\ m = -\ell, -\ell+1, \ldots, 0, \ldots, +\ell-1, +\ell & \end{array}}$$

El vector $\vec{L}$ se encuentra en un cono pero desconocemos sus componentes L_x y L_y

Los armónicos esféricos tienen la siguiente forma:

$$\boxed{Y_\ell^m(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}\right] \cdot P_\ell^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}}$$



Ejemplo con $\ell = 2$, $|\vec{L}| = \sqrt{6}\hbar$

Armónicos esféricos

ℓ	m	$Y_\ell^m(\theta,\phi)$
0	0	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$
1	0	$\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta$
	±1	$\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}$
2	0	$\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)$
	±1	$\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$
	±2	$\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}^2\theta e^{\pm 2i\phi}$
3	0	$\left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$
	±1	$\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta(5\cos^2\theta-1)e^{\pm i\phi}$
	±2	$\left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$
	±3	$\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

Como puede verse en la tabla cuando el número cuántico m es distinto de cero, los armónicos esféricos no son funciones reales. Mediante combinaciones lineales de funciones complejas se pueden obtener funciones reales usando las relaciones:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$$
$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$$

Por ejemplo, para el caso Y_1^1 y Y_1^{-1} tenemos:

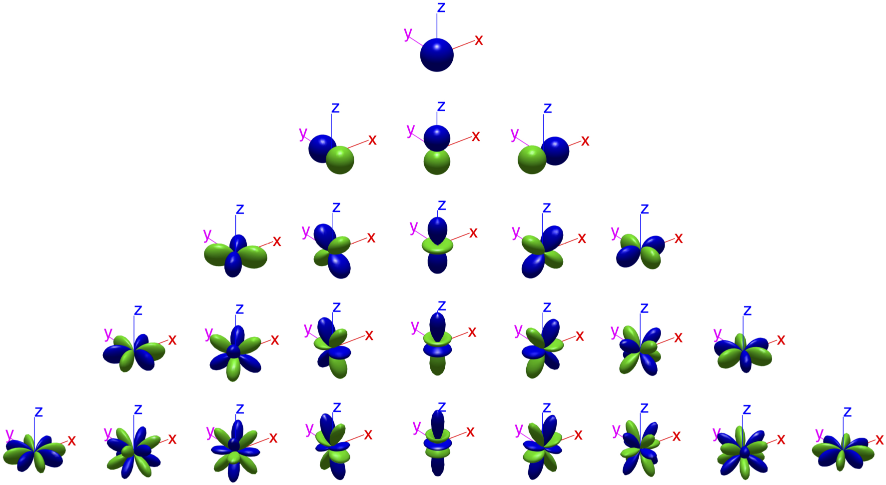
$$\frac{Y_1^1+Y_1^{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$
$$\frac{Y_1^1-Y_1^{-1}}{i\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

La combinación lineal de dos funciones propias degeneradas de $\widehat{L}^2$ son también funciones propias de dicho operador con el mismo valor propio, sin embargo, no lo son del operador $\widehat{L}_z$ dado que no son degeneradas respecto a este último. Este procedimiento nos permite obtener armónicos esféricos reales (ver tabla):

Armónicos esféricos reales

ℓ	m	$Y_\ell^m(\theta,\phi)$	$\widehat{L}^2$	$\widehat{L}_z$	cartesianas
0	0	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$	$+$	$+$	
1	0	$\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta$	$+$	$+$	(z)
	$\cos\phi$	$\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\theta\cos\phi$	$+$	$-$	(x)
	$\mathrm{sen}\phi$	$\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$	$+$	$-$	(y)
2	0	$\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)$	$+$	$+$	(z^2)
	$\cos\phi$	$\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\theta\cos\theta\cos\phi$	$+$	$-$	(xz)
	$\mathrm{sen}\phi$	$\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi$	$+$	$-$	(yz)
	$\cos2\phi$	$\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}^2\theta\cos2\phi$	$+$	$-$	(x^2-y^2)
	$\mathrm{sen}2\phi$	$\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}2\phi$	$+$	$-$	(xy)

Gráficas de Armónicos esféricos



Momento angular

Operadores ascendente y descendente

Para determinar los valores propios de operadores de momento angular son muy útiles los operadores ascendente y descendente que se definen como:

$$\widehat{L}_+ = \widehat{L}_x + i\widehat{L}_y$$
$$\widehat{L}_- = \widehat{L}_x - i\widehat{L}_y$$

puede demostrarse a partir de las relaciones de conmutación que los operadores $\widehat{L}_+$ y $\widehat{L}_-$ conmutan con $\widehat{L}^2$, mientras que con $\widehat{L}_z$ tenemos:

$$[\widehat{L}_+, \widehat{L}_z] = -\hbar\widehat{L}_+$$

$$[\widehat{L}_-, \widehat{L}_z] = +\hbar\widehat{L}_-$$

aplicamos ahora el operador $\widehat{L}_+$ por la izquierda a las ecuaciones de autovalores de $\widehat{L}_z$ y $\widehat{L}^2$, obteniendo:

$$\widehat{L}_+\widehat{L}_z \cdot Y_\ell^m = m\hbar \cdot \widehat{L}_+ Y_\ell^m$$
$$\widehat{L}_+\widehat{L}^2 \cdot Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot \widehat{L}_+ Y_\ell^m$$

ahora usamos el conmutador entre $\widehat{L}_+$ y $\widehat{L}_z$ para:

$$\widehat{L}_z\widehat{L}_+ \cdot Y_\ell^m = (m+1)\hbar \cdot \widehat{L}_+ Y_\ell^m$$
$$\widehat{L}^2\widehat{L}_+ \cdot Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot \widehat{L}_+ Y_\ell^m$$

de todo ello se puede deducir:

$$\widehat{L}_+ \cdot Y_\ell^m \propto Y_\ell^{m+1}$$

análogamente:

$$\widehat{L}_- \cdot Y_\ell^m \propto Y_\ell^{m-1}$$

De las definiciones y usando conmutadores entre $\widehat{L}_x$ y $\widehat{L}_y$:

$$\widehat{L}_+\widehat{L}_- = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \hbar\widehat{L}_z$$

de donde fácilmente se obtiene (también para $\widehat{L}_-\widehat{L}_+$):

operadores de momento angular

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_+\widehat{L}_- - \hbar\widehat{L}_z + \widehat{L}_z^2$$
$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_-\widehat{L}_+ + \hbar\widehat{L}_z + \widehat{L}_z^2$$